

BOZZA E PROGETTO DI UNA RELAZIONE PER IL ROTARY MILANO SUD SUI RAPPORTI TRA LEONARDO DA VINCI E FRA LUCA PACIOLI, E SULLE FIGURE DI POLIEDRI DISEGNATE DA LEONARDO PER L'OPERA "DE DIVINA PROPORZIONE" DI PACIOLI.

17 maggio 1999.

TITOLO: *LEONARDO E LA "DIVINA PROPORZIONE"*.

RIASSUNTO. Si presenta un interessante documento storico della collaborazione tra Leonardo da Vinci e il matematico suo contemporaneo Luca Pacioli, frate francescano. Questo originale personaggio è nato in Borgo San Sepolcro nel 1445; era dunque toscano e quasi coetaneo di Leonardo da Vinci [1452-1519]. In gioventù aveva collaborato con il mercante veneziano di origine ebraica Rompiaci, ed aveva avuto occasione di verificare la potenza e l'efficacia del sistema di rappresentazione dei numeri, che a noi oggi appare del tutto naturale, ma che, per quei tempi, era una novità importantissima. Era stato chiamato a Milano da Ludovico il Moro verso la fine del secolo XV, ed aveva scritto, in onore del Duca, un trattato intitolato "De divina Proportione". In questo trattato il Pacioli presenta alcune proprietà di certe figure geometriche, già studiate dalla geometria greca, alle quali la scienza rinascimentale attribuiva particolare importanza: tanto che Leonardo tracciò le figure geometriche che illustrano il trattato del Pacioli. La Biblioteca Ambrosiana possiede una copia del codice di Pacioli e quindi anche una copia delle figure originali [andate perse]; abbiamo qui una testimonianza dell'interesse che Leonardo nutriva per quella che al suo tempo era la matematica più avanzata per la società rinascimentale.

1 - L'occasione per questo discorso mi è stata porta dal dono che mi è stato fatto di un'opera che vorrei definire interessantissima: la riproduzione del libro di fra' Luca Pacioli intitolato "De divina proportione", riproduzione dovuta alla munificenza dell'Associazione delle Casse di Risparmio italiane. L'opera riproduce un codice che è nella Biblioteca Ambrosiana, e che è stato analizzato e studiato dal prof. Augusto Marinoni, recentemente scomparso, uno dei nostri più autorevoli studiosi di Leonardo ed in particolare del Codice Atlantico e delle parti di questo che riguardano l'aritmetica.

NOTA. Lavori del prof. Augusto MARINONI su Leonardo.

A.M. La teoria dei numeri frazionari nei manoscritti vinciani di Leonardo e Luca Pacioli. In Rassegna vinciana " , 1954, pp.111-196.

Leonardo, Luca Pacioli e il "De ludo geometrico " . In Atti dell'Accademia Petrarca di Lettere, Arti e Scienze di Arezzo. XL, 1970, pp. 180-205.

Fac simile del codice sul volo degli uccelli. Nella Biblioteca Reale di Torino [Curato da A.M.].

Traggo queste notizie da un CD-Rom intitolato "Leonardo a Torino. I disegni della Biblioteca Reale."

2 - Figura interessantissima di questa avventura intellettuale è il matematico Luca Pacioli, frate dell'ordine dei minori francescani. Nato nel 1455 a Borgo San Sepolcro, Pacioli si trasferì giovanissimo a Venezia, e si impiegò nella casa dell'ebreo Rompiaci, dei cui figli divenne istitutore. Egli seguì anche il padrone in vari fortunosi viaggi di commercio, ed ebbe così modo di impraticarsi dei problemi matematici relativi alla computisteria, alla tenuta dei libri contabili, alle questioni del mondo del commercio e del lavoro.

E' bene ricordare che la convenzioni per rappresentare i numeri che oggi tutto il mondo civile utilizza, e che sono insegnate nelle scuole elementari ai nostri ragazzi, furono introdotte nel mondo occidentale da Leonardo Pisano detto "Il Fibonacci" [1170-1250]; questi era pure interessato nei commerci marittimi, e diffuse l'impiego di queste convenzioni, che si rivelarono molto presto utilissime per la pratica commerciale. A noi tali convenzioni appaiono, per così dire, del tutto naturali; ma vale la pena di ricordare quale importanza la loro introduzione ed il loro impiego metodico abbia avuto per la società europea del tempo. Io penso che da questo episodio, che può apparire poco importante, si possa far partire l'inizio dello sviluppo della scienza modernamente intesa; cioè della scienza che riconosce nella matematica il metodo e lo strumento concettuale e simbolico principale per la rappresentazione della realtà e per la sua conoscenza autenticamente scientifica.

Pacioli vestì l'abito dei frati minori francescani e visitò varie città: Perugia, Venezia, Zara, Firenze, Napoli, insegnando e svolgendo altro lavoro didattico, con la scrittura di opere di divulgazione e di algebra. Egli fu chiamato a Milano nel 1496 da Ludovico il Moro, ed in questa nostra città ebbe l'incarico dell'insegnamento pubblico della matematica. In segno di gratitudine il Pacioli scrisse il

trattato “De divina Proportione”, e nel 1498 lo dedicò al Duca di Milano, con una dedica molto ossequiosa.

3 - Quando, nel 1499, il Moro fu sconfitto dai Francesi del re Luigi XII, il Pacioli lasciò Milano, insieme con Leonardo da Vinci. I due amici toccarono Mantova e Venezia e finirono per stabilirsi per qualche anno a Firenze; mentre colà risiedeva il Pacioli ebbe occasione di tenere lezioni nelle università di Bologna e di Pisa.

Occorre ricordare che il Pacioli, mentre era a Milano, oltre al trattato “De divina Proportione” di cui diremo, aveva iniziato anche a comporre un altro trattato dal titolo “De viribus quantitatis”, che è una grande raccolta di giochi matematici e non matematici, indovinelli, proverbi e divertimenti vari. Questa opera fu proseguita durante il suo soggiorno a Firenze, soggiorno durante il quale il Pacioli iniziò anche la traduzione di Euclide in volgare, e curò la stampa della versione latina dello stesso trattato degli Elementi di Euclide.

Ricordo anche, di passaggio, che l’impresa della traduzione di Euclide fu compiuta dall’umanista Federico Commandino (1509-75): e ricordo a questo proposito una polemica che il matematico bresciano Niccolò Tartaglia (1500-57) ebbe col Commandino: infatti Tartaglia rivendicava per sé la priorità della traduzione di Euclide *in lingua volgare*, mentre la traduzione primitiva del Commandino era dal greco in latino.

Ma lasciamo da parte queste dispute fra dotti (cosa non infrequente anche oggi) e torniamo a Pacioli. Egli proseguì la sua attività didattica con frequenti spostamenti a Firenze, Venezia e Perugia, fino a che nel 1514 il Papa Leone lo chiamò a Roma ad insegnare matematica.

Gli storici pongono la morte del Pacioli nel 1514, ed indicano la città nativa di Borgo San Sepolcro come luogo della sua sepoltura.

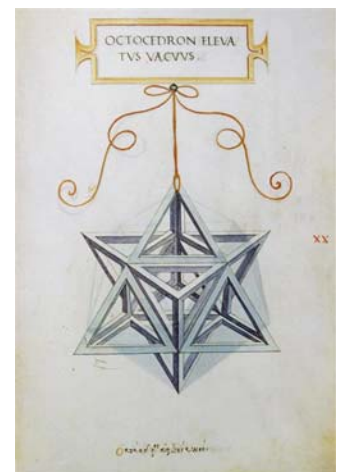
4 - Come abbiamo detto, Pacioli scrisse il trattato “De divina proportione” quando era a Milano, e



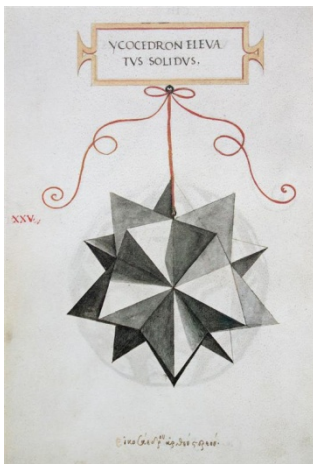
lo dedicò a Ludovico il Moro. Il contenuto di questo trattato ci fornisce indicazioni molto interessanti sulla scienza dell’epoca, ed in particolare sulla matematica di quel tempo.

Il trattato in parola riguarda un capitolo abbastanza noto della geometria greca, che fu ripreso dalla matematica del Rinascimento, ed accompagnato da considerazioni filosofiche ed estetiche ovviamente estranee alla matematica, ma interessanti per conoscere gli uomini del tempo e la loro cultura. Non posso addentrarmi in particolari tecnici e quindi mi limiterò ad illustrare l’argomento in modo sommario. A questo fine vi invito ad immaginare una figura ben nota e molto abituale: quella della stella regolare a cinque punte: essa fa parte dell’insegna ufficiale della nostra repubblica, è tradizionale distintivo delle nostre forze armate (le *stellette*), e compare come insegna anche delle forze armate di altri paesi oltre il nostro. Orbene,

se si ritagliano 10 triangoli uguali alle punte della stella in parola, e di dispongono attorno ad un centro, essi costituiscono un poligono regolare di 10 lati (un *decagono regolare*, dicono i matematici). Questa figura si trova in Euclide, costruita con riga e compasso; e già Euclide aveva basato la sua costruzione su una proprietà che potrebbe essere enunciata così: “*In un decagono regolare, il lato è medio proporzionale tra il raggio della circonferenza circoscritta e la parte rimanente* “. Questa relazione tra le lunghezze di tre segmenti, che sono, per così dire, personaggi nel problema della costruzione di un poligono regolare così noto come il decagono regolare, ha stimolato i matematici ed anche gli artisti a svolgere varie riflessioni, nelle quali matematica, geometria, estetica e talvolta anche magia hanno convissuto: per esempio ricordo che, una volta costruito il decagono, il pentagono regolare si ottiene con tutta facilità. Questa figura ha sempre avuto una certa fortuna presso quelli che oggi vengono indicati come *operatori dell’occulto*; come mio parere personale vorrei dire che questa convivenza tra varie dottrine non è sempre stata né tranquilla né semplice, e non sempre ha giovato



alla chiarezza delle idee. In particolare, molti di coloro che hanno riflettuto sul bello, e sui fondamenti dell'estetica, hanno voluto scorgere nelle figure, collegate con queste considerazioni geometriche, particolari qualità di bellezza ideale. Non ci meravigliamo quindi per il fatto che già Platone nel suo



dialogo intitolato TIMEO attribuisca un ruolo particolare al poliedro regolare che i matematici chiamano *dodecaedro regolare* e che ha 12 facce costituite da pentagoni regolari. Il grande filosofo greco, nell'indagare la costituzione fisica dell'universo, elenca i quattro elementi primitivi che costituivano la materia sensibile, secondo la scienza del tempo. Tali elementi sono terra, acqua, aria e fuoco, ed a ciascuno di essi Platone fa corrispondere uno tra i poliedri regolari che egli studia: tetraedro, cubo, ottaedro, icosaedro. Precisamente: al tetraedro fa corrispondere il fuoco, al cubo la terra, all'icosaedro l'acqua ed all'ottaedro l'aria. E dà anche le ragioni per queste assegnazioni. Egli afferma che le particelle costituenti il fuoco hanno la forma del tetraedro regolare: questo infatti, tra i poliedri regolari, è quello che ha le "punte" più acute, che "mordono" così come il fuoco scotta; proseguendo nello stesso stile Platone afferma che le

particelle della terra hanno forma cubica, per la stabilità insita all'elemento stesso. In terzo luogo alle particelle che costituiscono l'acqua Platone attribuisce la forma dell'icosaedro regolare. Esso è il poliedro regolare che più si avvicina alla sfera, essendo costituito da 20 triangoli equilateri (ricordo che un artigiano che me ne aveva costruito un modello lo chiamò "palla di triangoli"); tale forma delle particelle spiegherebbe il fatto che l'acqua scorre. Infine l'ottaedro regolare presta la forma alle particelle dell'aria.

Per quanto riguarda l'ultimo solido regolare, il dodecaedro, Platone dice che "...il Demiurgo si avvale di esso per ornare l'Universo". [Platone. Timeo. Traduzione di Giovanni Reale. 55 C 4-6. (Rusconi libri, 1994)].

Egli inoltre aggiunge che "Tutte queste forme bisogna concepirle così piccole che ciascuna parte, per la sua piccolezza non è visibile da noi, mentre, quando si radunano insieme, se ne vedono le masse". [Ibid. Pag. 163].



5 - Queste elucubrazioni ci fanno oggi sorridere, perché le nostre conoscenze sono molto più estese. Tuttavia credo che valga la pena di ricordare che, in tempi a noi molto più vicini di quelli di Platone, e precisamente nella prima metà del secolo XIX, il grande fisico André Marie Ampère [1775-1836] escogitò una spiegazione per così dire geometrica delle valenze degli elementi chimici, che erano conosciuti al suo tempo; spiegazione che si potrebbe a buon diritto chiamare "platonica", perché era fondata sulle presunte forme poliedriche delle molecole.

NOTA. Non pare prudente sorridere di queste argomentazioni, che stanno tra il filosofico e lo scientifico: probabilmente i nostri nipoti sorrideranno delle nostre teorie, di cui andiamo tanti fieri

E' bene ricordare che "noi siamo pigmei, che vediamo lontano perché siamo seduti sulle spalle di giganti", come diceva anche Isacco Newton.

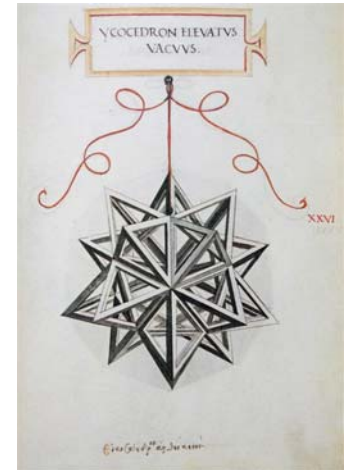
Del resto l'analisi della configurazione geometrica degli elementi costitutivi della materia è stata ripresa dalla scienza contemporanea: per esempio tutti noi conosciamo il grande modello di atomo di ferro che è stato preso come insegna (il "logo" si usa dire oggi) dell'Esposizione mondiale di Bruxelles. E tutti ricordano quei complicatissimi modelli affascinanti, a doppia elica, che rappresentano le molecole di DNA.

La scienza rinascimentale, sulla scia del pensiero classico, aggiunge a questi schemi di spiegazione razionale anche le considerazioni estetiche.

6 - Riflessioni di questo tipo, miste di matematica, fisica, estetica e filosofia si incontrano spesso presso i dotti medievali ed anche nei periodi precedenti la nascita della scienza modernamente intesa.

Appare quindi del tutto naturale che esse abbiano attratto anche una intelligenza come quella di Leonardo da Vinci.

Occorre ricordare a questo punto che stava nascendo l'Algebra come dottrina autonoma, slegata dalla geometria, la quale aveva per secoli dominato il campo delle scienze matematiche. Le convenzioni per la rappresentazione dei numeri, che sono quelle da noi usate anche oggi, permettevano di risolvere nuovi problemi e di presentare i vecchi sotto nuove forme. Ed in questa nuova arte dei numeri il Pacioli era diventato maestro, come si è detto. In particolare stava nascendo la teoria dei numeri frazionari, che noi facciamo studiare ai nostri scolari sotto il nome di "frazioni" nelle scuole elementari. Questi strumenti della matematica elementare a noi appaiono oggi del tutto naturali, e fanno parte del nostro bagaglio quotidiano di strumenti di conoscenza; ma ciò non avveniva all'epoca di Leonardo. Per esempio nel "Codice Atlantico" (che, come è noto, sta alla Biblioteca Ambrosiana) il Marinoni ha scoperto vari tentativi di calcolo con frazioni: forse degli esercizi con i quali Leonardo intendeva impraticarsi dei nuovi strumenti scientifici .



Volendo tentare una ricerca delle radici del fascino delle figure che abbiamo nominato, e che Leonardo ha rappresentato, si potrebbero svolgere varie considerazioni: la prima potrebbe riguardare il fatto che la simmetria delle figure ha sempre riscosso un notevole apprezzamento a livello estetico. Non voglio qui avanzare delle spiegazioni psicologiche o filosofiche di questo fatto. Ricordo le considerazioni svolte e le opere scritte da matematici e fisici di grande nome su questo argomento. Un nome, tra i tanti, è quello di Pierre Curie [1859-1906]; egli sviluppò delle analisi di grande profondità sul rapporto tra il concetto di simmetria e le leggi della fisica che oggi qualcuno chiama macroscopica; e non sto a ricordare l'impiego del concetto di simmetria nella fisica avanzata moderna.



Ma si potrebbe anche ricercare le radici del fascino della simmetria geometrica ad un livello più profondo: vorrei dire infatti che la simmetria geometrica si presenta come un caso tipico in cui la nostra mente può avere la sensazione di un possesso pieno del proprio oggetto; questo si presenta come trasparente, e non soltanto alla immaginazione, nelle figure , ma anche alla mente, la quale sente di poter raggiungere la certezza, in modo tale da poter affermare con ragione che "le cose debbono essere così come è dimostrato e non possono essere diversamente ". E' forse quel fascino che ha attirato Platone, quando non soltanto elenca i cinque solidi regolari che portano il suo nome, ma dimostra in modo irrefutabile che sono tutti i possibili, e che non ne possono esistere altri.

Qui dovrebbe esserci la presentazione di qualche diapositiva [non più di mezza dozzina, per evitare la noia, grande costante presenza alle conferenze].

Forse delle considerazioni analoghe a queste hanno convinto Leonardo a tracciare queste figure: altrimenti non si spiegherebbe come mai lui - che aveva dipinto e sapeva dipingere i capolavori che tutti conosciamo - si sia abbassato a tal punto da fare le illustrazioni (diremmo con linguaggio di oggi) di un libro di geometria, anche se scritto dall'amico fra' Luca e dedicato al Duca che al tempo dominava Milano.

Quasi certamente il suo spirito di indagatore instancabile dei misteri della natura (ricordiamo gli studi sulle onde, sul volo degli uccelli, gli studi di anatomia, affrontati da lui con tanta fatica e disagio) è stato affascinato dal mistero della matematica. Di questa dottrina dice l'amico Fra' Luca, citando Aristotele: "Esse [le dottrine matematiche] sono nel primo grado della certezza", e dice la Sapienza che "omnia consistunt in numero, pondere et mensura " .